Übungsblatt Nr. 5

Aufgabe 1: Kommutatoren

Berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{x}, \hat{z}]$, $[\hat{p}_x, \hat{p}_z]$, $\left[\frac{1}{\hat{y}}, \hat{p}_y\right]$, $[\hat{z}^2, \hat{p}_z]$, $[\hat{z}, \hat{p}_z^2]$ und $[\hat{p}_z^2, \hat{z}]$.

Aufgabe 2: Eigenfunktionen und Eigenwerte

Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-bx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2b^{\frac{3}{2}}}$.

Gegeben sei der Operator $\hat{A} = \frac{d^2}{dx^2} - 4x^2$ und die Funktionen $f_1(x) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}$ und $f_2(x) = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} x e^{-x^2}$.

a) Sind $f_1(x)$ und $f_2(x)$ normiert? *Hinweis:* für eine normierte Funktion gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} f^* f \quad dx = 1$

b) Zeigen Sie, dass $f_1(x)$ eine Eigenfunktion von $\hat{A}$ zum Eigenwert $\mathrm{c}_1 = -2$ ist.
Auch $f_2(x)$ ist eine Eigenfunktion von $\hat{A}$ und zwar zum Eigenwert $\mathrm{c}_2 = -6$.

c) Zwei Funktionen sind orthogonal, wenn gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_k^* f_m dx = 0, \qquad \text{wenn } k \neq m$$

Zeigen Sie, dass f_1 und f_2 orthogonal zueinander sind.

d) Berechnen Sie für $g(x) = \frac{i\sqrt{3}}{2} f_1(x) - \frac{1}{2} f_2(x)$ den Erwartungswert $\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g^* \hat{A} g \, dx$. Benutzen Sie dafür die in den vorherigen Teilaufgaben bewiesene Tatsache, dass f_1 und f_2 orthonormale Eigenfunktionen (siehe auch Einschub 8, Seite 67 im Vorlesungsskript) des Operators $\hat{A}$ sind, dadurch können Sie das explizite Lösen des Integrals vermeiden!

Aufgabe 3: Aufenthaltswahrscheinlichkeit

Die normierte Wellenfunktion für ein Teilchen im eindimensionalen Potentialtopf der Länge L, das sich im Quantenzustand n befindet, ist

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

a) Das Teilchen befinde sich im Zustand n=1. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im 1. Drittel des Potentialtopfs ($0 < x \leq L/3$) zu finden.
Hinweis: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

b) Das Teilchen befinde sich im Zustand n=1000. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im 1. Drittel des Potentialtopfs ($0 < x \leq L/3$) zu finden.

c) Diskutieren Sie die unterschiedlichen Ergebnisse! Welcher Fall entspricht der klassischen Erwartung?