Übungsblatt Nr. 4

Ausgabe: 12.5.2016 Rückgabe: 19.5.2016 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1: Eigenwertproblem

Gegeben sei der Operator $\hat{A} = \frac{d^2}{dx^2} - 4x^2$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f_1(x) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}$ eine Eigenfunktion von $\hat{A}$ zum Eigenwert -2 ist.

b) Auch $f_2(x) = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} xe^{-x^2}$ ist eine Eigenfunktion von $\hat{A}$ und zwar zum Eigenwert $= -6$. Berechnen Sie für $g(x) = c_1 f_1(x) + c_1 f_2(x)$ mit $c_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $c_2 = -\frac{1}{2}$ den Erwartungswert von $\hat{A}$. Sie dürfen ohne weitere Rechnung annehmen, dass f_1 und f_2 orthonormierte Eigenfunktionen von $\hat{A}$ sind.

Aufgabe 2: Impuls- und Ortsoperator

Nehmen Sie an, dass die Wellenfunktion $\Psi(x) = Ae^{ikx}$ auf dem Intervall $0 \leq x \leq a$ definiert ist und dass „periodische Randbedingungen" gelten: $\Psi(a) = \Psi(0)$. Die Konstante k ist daher durch $k = n\frac{2\pi}{a}$ gegeben, wobei n eine ganze Zahl ist.

a) Normieren Sie die Wellenfunktion $\Psi(x)$ auf 1, d.h. bestimmen Sie die Konstante A.

b) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion $\Psi(x)$ eine Eigenfunktion des Impulsoperators $\hat{p}$ ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert?

c) Zeigen Sie, dass dieselbe Wellenfunktion keine Eigenfunktion des Ortsoperators $\hat{x}$ ist. Bestimmen Sie den Erwartungswert $\langle\hat{x}\rangle$ des Ortsoperators.

Aufgabe 3: Kommutatoren

Berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{x}, \hat{y}]$, $[\hat{p}_x, \hat{p}_y]$, $\left[\frac{1}{\hat{x}}, \hat{p}_x\right]$, $[\hat{x}^2, \hat{p}_x]$ und $[\hat{x}, \hat{p}_x^2]$.

Hinweise: $\hat{x} = x$ $\hat{y} = y$ $\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ $\hat{p}_y = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dy}$